Московский Авиационный Институт (национальный исследовательский университет)

**Факультет Компьютерных наук и прикладной математики**

Кафедра Вычислительной математики и программирования

Курсовая работа

**по дисциплине**

**«Численные методы» IV курс, VII семестр**

Студент: Гришин П. Ф. Группа: М8О-401Б-21

Руководитель: Ревизников Д. Л.

**Москва 2025**

**Содержание**

[Постановка задачи 3](#_Toc190858894)

[Описание 3](#_Toc190858895)

[Реализация 3](#_Toc190858896)

[Результаты работы 5](#_Toc190858897)

[Вывод 9](#_Toc190858898)

# Постановка задачи

Интерполяция — это задача нахождения функции, которая проходит через заданные точки . В данной работе рассматривается метод интерполяции с использованием экспоненциальных сплайнов, который особенно полезен для данных с экспоненциальным характером (например, быстро растущих или убывающих).

Целью работы являются:

1. Разработать алгоритм интерполяции на основе экспоненциальных сплайнов.
2. Реализовать алгоритм на языке Python.
3. Протестировать алгоритм на различных наборах данных.

Задачи:

1. Изучить математическую основу экспоненциальных сплайнов.
2. Реализовать алгоритм интерполяции.
3. Провести тестирование и визуализацию результатов.

# Описание

Экспоненциальный сплайн — это функция, которая на каждом отрезке задаётся в виде:

где:

1. – коэффициенты, которые необходимо найти,
2. *α* — параметр, управляющий экспоненциальностью (чем больше *α*, тем сильнее влияние экспонент).

**Условия для коэффициентов:**

1. Совпадение значений в узлах:
2. Непрерывность производных:
3. Граничные условия (естественные сплайны):

Эти условия позволяют построить систему линейных уравнений, решение которой даёт коэффициенты .

# Реализация

import numpy as np

def exponential\_spline(x, y, alpha=1):

x = np.asarray(x)

y = np.asarray(y)

n = len(x)

n\_segments = n - 1

h = np.diff(x)

n\_vars = 4 \* n\_segments

A = np.zeros((n\_vars, n\_vars))

b = np.zeros(n\_vars)

row = 0

# Уравнения для значений в узлах

for i in range(n\_segments):

# S\_i(x\_i) = y\_i

A[row, 4\*i] = 1 # a\_i

A[row, 4\*i+2] = 1 # c\_i

A[row, 4\*i+3] = 1 # d\_i

b[row] = y[i]

row += 1

# S\_i(x\_{i+1}) = y\_{i+1}

A[row, 4\*i] = 1 # a\_i

A[row, 4\*i+1] = h[i] # b\_i

A[row, 4\*i+2] = np.exp(alpha \* h[i]) # c\_i

A[row, 4\*i+3] = np.exp(-alpha \* h[i]) # d\_i

b[row] = y[i+1]

row += 1

for i in range(n\_segments-1):

A[row, 4\*i+1] = 1 # b\_i

A[row, 4\*i+2] = alpha \* np.exp(alpha \* h[i]) # c\_i

A[row, 4\*i+3] = -alpha \* np.exp(-alpha \* h[i]) # d\_i

A[row, 4\*(i+1)+1] = -1 # -b\_{i+1}

A[row, 4\*(i+1)+2] = -alpha # -c\_{i+1}

A[row, 4\*(i+1)+3] = alpha # d\_{i+1}

row += 1

A[row, 4\*i+2] = np.exp(alpha \* h[i]) # c\_i

A[row, 4\*i+3] = np.exp(-alpha \* h[i]) # d\_i

A[row, 4\*(i+1)+2] = -1 # -c\_{i+1}

A[row, 4\*(i+1)+3] = -1 # -d\_{i+1}

row += 1

# Левая граница: c\_0 + d\_0 = 0

A[row, 2] = 1

A[row, 3] = 1

row += 1

# Правая граница: c\_{n-1}\*exp(alpha h) + d\_{n-1}\*exp(-alpha h) = 0

i = n\_segments - 1

A[row, 4\*i+2] = np.exp(alpha \* h[i])

A[row, 4\*i+3] = np.exp(-alpha \* h[i])

row += 1

coeffs = np.linalg.solve(A, b)

# Создание списка коэффициентов для каждого сегмента

spline\_coeffs = []

for i in range(n\_segments):

a = coeffs[4\*i]

b\_coef = coeffs[4\*i+1]

c = coeffs[4\*i+2]

d = coeffs[4\*i+3]

spline\_coeffs.append((a, b\_coef, c, d, x[i], alpha))

def interpolate(x\_query):

x\_query = np.asarray(x\_query)

result = np.zeros\_like(x\_query)

for i, xi in enumerate(x\_query):

idx = np.searchsorted(x, xi) - 1

idx = max(0, min(idx, n\_segments-1))

a, b, c, d, x0, alpha = spline\_coeffs[idx]

dx = xi - x0

result[i] = a + b\*dx + c\*np.exp(alpha\*dx) + d\*np.exp(-alpha\*dx)

return result

return interpolate

if \_\_name\_\_ == "\_\_main\_\_":

import matplotlib.pyplot as plt

x = [0, 1, 2, 3, 4]

y = [1, 3, 2, 4, -9]

spline = exponential\_spline(x, y, alpha=1.0)

xx = np.linspace(x[0], x[-1], 100)

yy = spline(xx)

plt.figure(figsize=(8, 6))

plt.plot(x, y, 'o', label='Исходные точки')

plt.plot(xx, yy, label='Экспоненциальный сплайн')

plt.title('Интерполяция экспоненциальными сплайнами')

plt.xlabel('x')

plt.ylabel('y')

plt.legend()

plt.grid(True)

plt.show()

# Результаты работы

Тестирование на данных

Программа была протестирована на следующих данных при *α = 2.3*:

Изображение выглядит как текст, линия, График, диаграмма

Контент, сгенерированный ИИ, может содержать ошибки.

Изображение выглядит как линия, График, диаграмма, текст

Контент, сгенерированный ИИ, может содержать ошибки.

# Вывод

Подводя итоги проделанной работы, стоит отметить, что она была достаточно интересной и познавательной. Я изучил метод интерполяции с использованием экспоненциальных сплайнов, который позволяет эффективно работать с данными, имеющими экспоненциальный характер. В процессе работы я познакомился с математической основой метода, включая построение системы уравнений для нахождения коэффициентов сплайна.

Нужно отметить, что реализация метода интерполяции с использованием экспоненциальных сплайнов требует внимательности к деталям, особенно при построении системы уравнений и учёте граничных условий. Однако, несмотря на некоторые сложности, метод показал свою эффективность и гибкость, особенно при работе с данными, которые имеют ярко выраженный экспоненциальный тренд.